Tema 4: Teorema de Fubini

22 de abril de 2010

1. Producto de medidas
   - Producto de espacios medibles
   - Medida producto
   - Caso de $\mathbb{R}^n$
2. Teorema de Fubini
   - Para funciones positivas
   - Aplicaciones
   - Para funciones integrables

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\,(Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\, B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \;=\;$ σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{B}_k=\mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$
- X numerable $\implies$ $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(Y)=\mathcal{P}(X\times Y)$
- $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(X)=\mathcal{P}(X\times X) \implies \operatorname{card} X\leqslant\operatorname{card}\mathbb{R}$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C}) \quad \text{espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \quad \text{espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X, \quad E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

  Las secciones de conjuntos medibles son medibles
- f medible $\implies f_x$ medible $\forall x \in X$, f^y medible $\forall y \in Y$

  Las funciones medibles son separadamente medibles

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A\in\mathcal{A},\ \forall B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n\in\mathcal{A},\ \mu(A_n)<\infty \ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida σ-finita}$$

Existe una única medida $\mu\otimes\nu : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$[\mu\otimes\nu](A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A\in\mathcal{A},\ \forall B\in\mathcal{B}$$

$\mu\otimes\nu$ medida producto, $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ
- El espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completo
- Si $(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida completo,
$$\mathcal{A} \subset \widetilde{A},\ \widetilde{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \overline{\mathcal{A}} \subset \widetilde{A},\ \widetilde{\mu}\big|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$$

$(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es la completación de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, y $\overline{\mu}$ la completación de la medida μ

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \; \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto $\mu \otimes \nu$ no es completa

$\lambda_n \otimes \lambda_k$ no es completa

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$, que a su vez extiende a β_{n+k}
- De hecho:

$$(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{M}_{n+k}, \lambda_{n+k}) = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k}, \overline{\lambda_n \otimes \lambda_k})$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f : X\times Y \to [0,\infty]$ medible, definimos:

$$\phi : X \to [0,\infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x\,d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \quad \forall x\in X$$

$$\psi : Y \to [0,\infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y\,d\mu = \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \quad \forall y\in Y$$

Entonces ϕ y ψ son medibles y se verifica que:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \phi\,d\mu = \int_Y \psi\,d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\,d\mu(x)\ d\nu(y)$$

Cálculo de la medida producto

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Cálculo de la medida producto

Para $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, definimos:

$$\phi : X \to [0,\infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x\in X$$
$$\psi : Y \to [0,\infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y\in Y$$

Entonces ϕ,ψ son medibles y se tiene

$$[\mu\otimes\nu](E) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$[\mu\otimes\nu](E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

La integral como medida

La integral como medida

$$(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ espacio de medida } \sigma\text{-finita}$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta) \text{ medida de Borel-Lebesgue}$$

Para $f : X \to [0, \infty[$, definimos

$$S(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

Entonces, f es medible si, y sólo si, $S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, en cuyo caso,

$$\int_X f\, d\mu = [\mu \otimes \beta]\big(S(f)\big)$$

Teorema de Hobson-Tonelli

$$(X, \mathcal{A}, \mu),\ (Y, \mathcal{B}, \nu) \text{ espacios de medida } \sigma\text{-finita}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \text{ espacio de medida producto}$$

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$

(2) $\displaystyle\int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)\ d\mu(x) < \infty$

(3) $\displaystyle\int_Y \int_X |f(x,y)|\, d\mu(x)\ d\nu(y) < \infty$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y $f\in\mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)$.
Existen conjuntos $A\in\mathcal{A}$ y $B\in\mathcal{B}$ tales que:

$$\mu(X\setminus A)=0\,,\quad f_x\in\mathcal{L}_1(\nu)\quad\forall x\in A$$
$$\nu(Y\setminus B)=0\,,\quad f^y\in\mathcal{L}_1(\mu)\quad\forall y\in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x)=\int_Y f_x\,d\nu=\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\quad\forall x\in A\,,\quad \phi(x)=0\quad\forall x\in X\setminus A$$
$$\psi(y)=\int_X f^y\,d\mu=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\quad\forall y\in B\,,\quad \psi(y)=0\quad\forall y\in Y\setminus B$$

se tiene que $\phi\in\mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi\in\mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\phi\,d\mu=\int_Y\psi\,d\nu$$

Todo ello se resume de nuevo en la expresión:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\;d\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\;d\nu(y)$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu\otimes\nu}\right)$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones ϕ y ψ definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \quad \text{para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f\, d\left(\overline{\mu\otimes\nu}\right) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Podemos de nuevo escribir:

$$\int_{X\times Y} f\, d\left(\overline{\mu\otimes\nu}\right) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\ d\nu(y)$$